Activiteit 15

IJzige wegen —Steinerbomen

Samenvatting

Soms kan een kleine, op het oog onbelangrijke, variatie van het specificeren van een probleem een heel groot verschil maken in de moeilijkheid van de oplossing. Net als Modderstad (activiteit 9) gaat deze activiteit over het zoeken van kortste routes in netwerken. Het verschil is dat we dit keer knooppunten mogen toevoegen als dat de lengte van het pad verkort. Het resultaat is een veel moeilijker probleem dat in zijn geheel niet op het Modderstad probleem lijkt, maar algoritmisch veel dichter bij het kaartkleuren (activiteit 13) en Toeristenstad (activiteit 14) staat.

Vaardigheden

- Ruimtelijk inzicht.
- Meetkundig redeneren.
- Algoritmische procedures en complexiteit.

Leeftijd

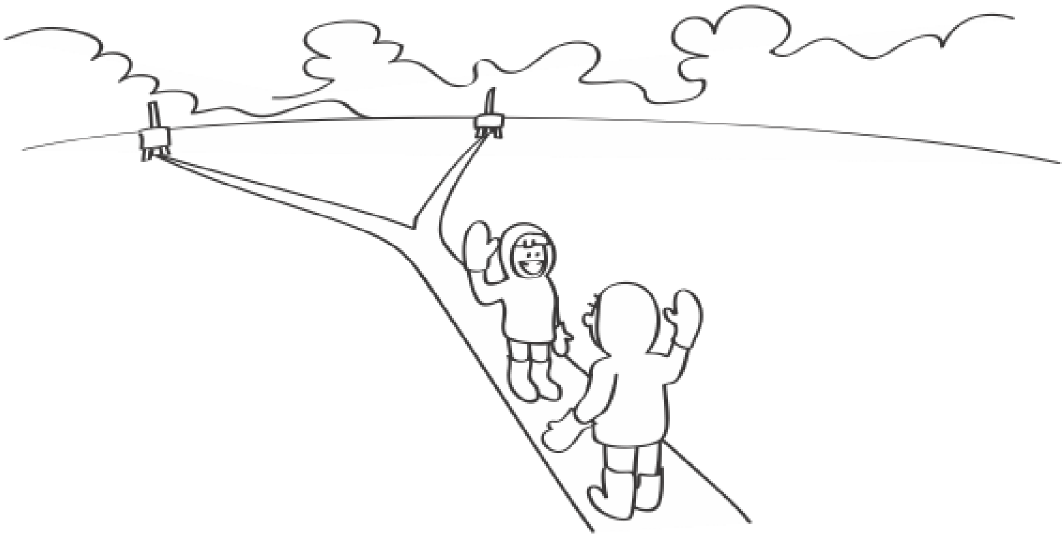
7 jaar en ouder

Materialen

Iedere groepje van leerlingen heeft nodig:

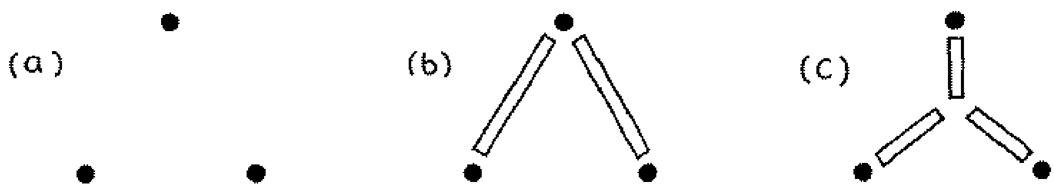
- vijf of zes tentharingen of stokjes.
- paar meter touw.
- meetlint
- pen en papier voor notities.

IJzige wegen



Introductie

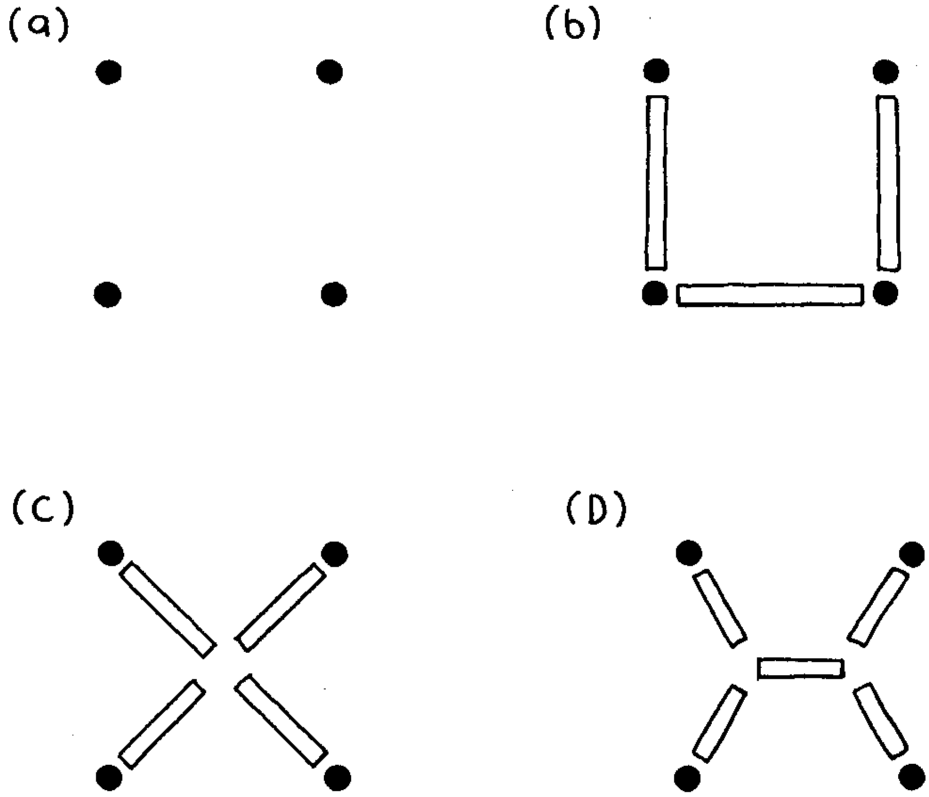
De vorige activiteit, Toeristenstad, vond plaats in een heel erg warm land, hier is het juist het tegenovergestelde. Op de bevroren meren van het bevroren noorden van Scandinavië (zo gaat het verhaal) maken sneeuwploegen wegen om dorpen met elkaar te verbinden. Het is zo koud en zulk rotwerk dat ze zo min mogelijk wegen willen maken, aan jou de taak om te bepalen waar de wegen moeten komen. Er zijn geen belemmeringen, de wegen kunnen overal op de eindeloze bevroren vlakte gemaakt worden.
De wegen moeten uiteraard in rechte lijnen uitgevoerd worden, bochten zorgen niet alleen voor meer slipgevaar, maar maken ook de wegen onnodig langer. Maar de oplossing is ook weer niet zo simpel dat je alle dorpen met een rechte lijn met elkaar verbindt, omdat het toevoegen van kruispunten midden op het meer de totale lengte van de wegen kan verminderen en het is de bedoeling om de lengte van de wegen zo kort mogelijk te houden en niet de reistijd tussen de dorpen.



In deze afbeelding laat (a) drie dorpen zien. Ze direct met elkaar verbinden als in (b) is een mogelijkheid en acceptabel. Maar een andere mogelijkheid is om een kruispunt in het midden van het meer toe te voegen (c) en deze met de drie dorpen te verbinden. Als de lengte van de wegen nu opmeet zal je zien dat de totaal gebouwde weg nu korter is en dit dus een betere oplossing. Dit extra kruispunt het een Steinerpunt, naar de Zwitserse wiskundige Jacob Steiner (1796-1863), die voor het eerst dit probleem beschreef en opmerkte dat de totale lengte verkort kan worden door het toevoegen van nieuwe knooppunten. Je kan een Steinerpunt zien als een nieuw fictief dorp.

Discussie

- Omschrijf het probleem waaraan de leerlingen gaan werken. Gebruik het voorbeeld hierboven. Laat zien dat in dit geval bij de drie dorpen, je soms een dorp moet toevoegen om tot een betere oplossing te komen en dus de lengte van de weg bekort.



- De leerlingen zullen vier knooppunten gebruiken in de vorm van een vierkant, zoals in (a). Ga naar buiten en laat ieder groepje leerlingen hun haringen plaatsen in het gras in een vierkant van ongeveer 1 bij 1 meter..
- Laat de leerlingen experimenteren met het verbinden van de haringen met touw. Laat ze de lengte van het benodigde touw opmeten en opschrijven. Op dit moment mogen ze nog geen Steinerpunten gebruiken. (Het minimum wordt bereikt door drie hoeken van het vierkant te verbinden, zoals in (b) en is de benodigde lengte dus 3 meter.)
- Kijk nu of de leerlingen het beter kunnen met behulp van Steinerpunten. (Voor één Steinerpunt is de beste plek is in het midden van het vierkant, (c) dan heb je $2*\sqrt{2} \approx 2.83$ meter nodig). Vertel de leerlingen dat ze het misschien wel nog beter

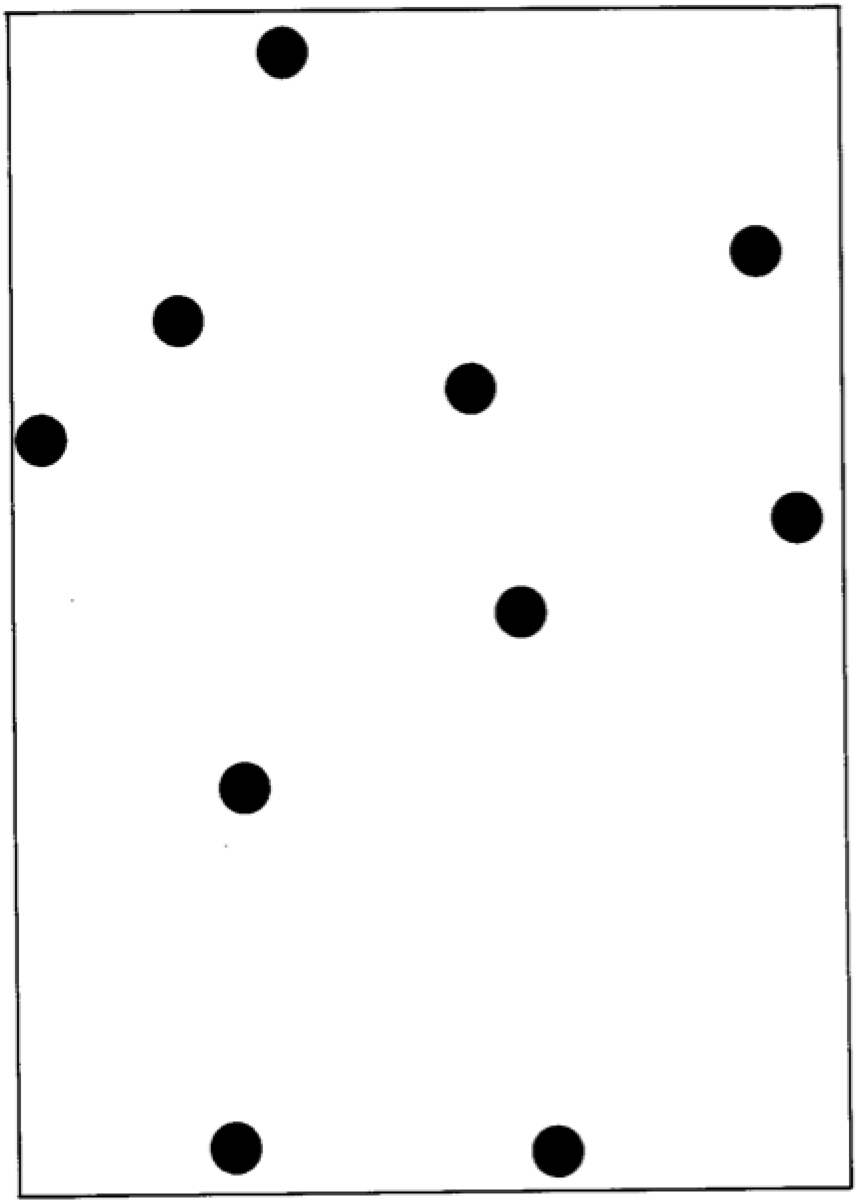
kunnen doen met behulp van twee Steinerpunten. (Dit kan inderdaad door twee extra knooppunten te plaatsen zoals in afbeelding (d), met hoeken van 120 graden met de inkomende wegen. De benodigde lengte is nu $1 + \sqrt{3} \approx 2.73$ meter.) Kan het nog beter met drie Steinerpunten? (Nee, twee knooppunten zijn de beste oplossing, er kan geen voordeel behaald worden door nog een punt toe te voegen.)

- Bediscussieer met de leerlingen waarom deze problemen zo moeilijk lijken.

(Omdat je niet weet waar je de Steinerpunten moet plaatsen en er zijn veel mogelijkheden om uit te proberen.)

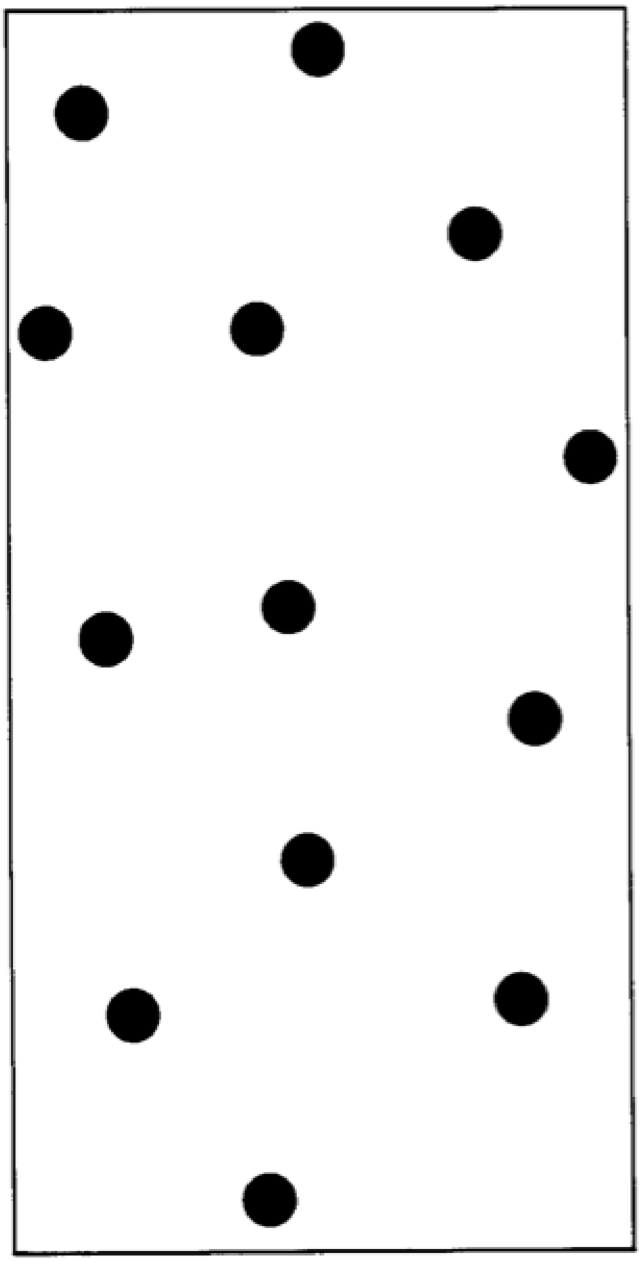
Werkblad 1: Steinerboom voorbeeld 1

Zoek een manier om deze dorpen met elkaar te verbinden waarbij je zo min mogelijk weg hoeft aan te leggen.

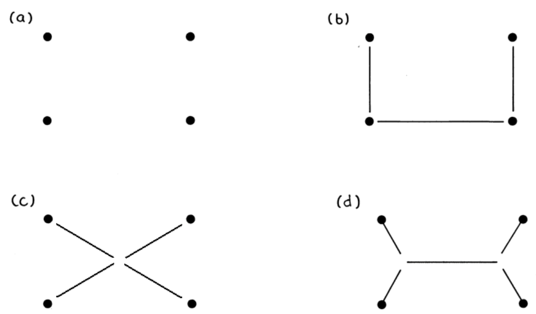


Werkblad 2: Steinerboom voorbeeld 2

Zoek een manier om deze dorpen met elkaar te verbinden waarbij je zo min mogelijk weg hoeft aan te leggen.

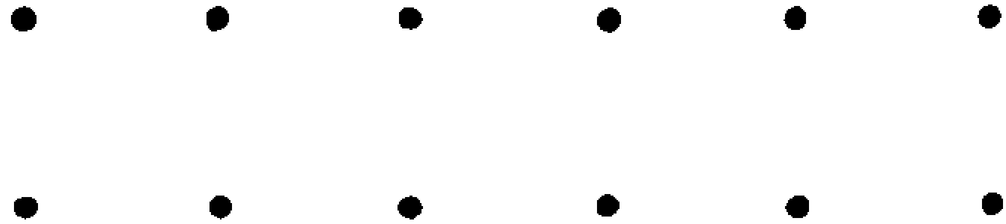


Variaties en uitbreidingen

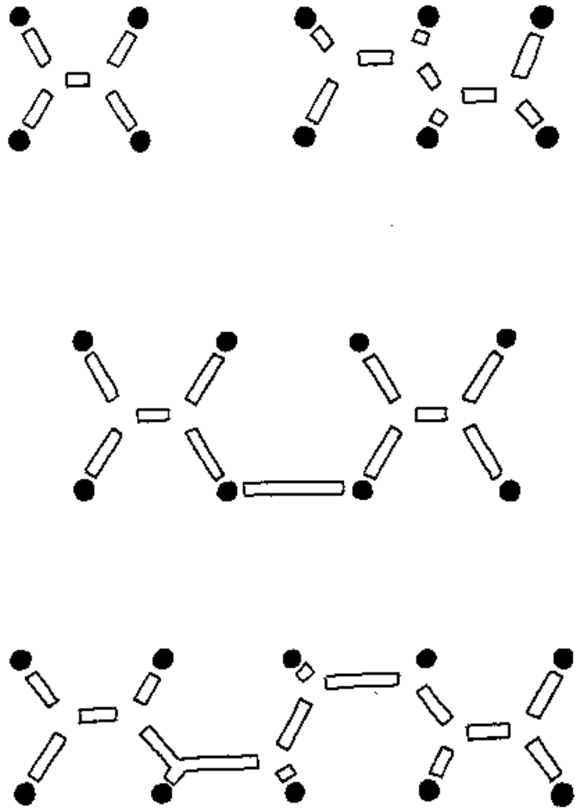


Een interessant experiment voor groepjes die al snel met de originele activiteit klaar zijn is om te werken met een rechthoek van 1 bij 2 meter (a) in plaats van een vierkant. De leerlingen zullen merken dat het toevoegen van een Steinerpunt de lengte van de weg alleen maar toe laat nemen, maar twee knooppunten toevoegen leidt wel tot een verbetering. (De lengte voor (b) is 4 meter, voor (c) is $2\sqrt{5} \approx 4.47$ meter, en $2 + \sqrt{3} \approx 3.73$ meter voor (d).) Kijk of ze kunnen ontdekken waarom de een-punt-extra-oplossing zoveel slechter werkt voor rechthoeken dan voor vierkanten. (Dat is omdat wanneer het vierkant tot een rechthoek wordt uitgetrokken, de extra lengte door het uittrekken bij (b) en (d) maar één keer wordt toegevoegd, maar bij (c) worden alle wegen langer).
Oudere leerlingen kunnen werken aan een groter probleem. Ze krijgen twee kaarten met de locaties van de dorpen die zij moeten verbinden met wegen van ijs op de werkbladen. Ze kunnen experimenteren met verschillende oplossingen door kopieën te maken van de werkbladen, met potlood en gum of overtrekpapier te werken. Ze kunnen ook buiten met tentharingen aan de slag. Ze mogen de klas laten controleren als ze denken een nieuw record van de kortste afstand te hebben gevestigd. (De figuren rechts laten de minimale oplossing zien voor het eerste voorbeeld en twee mogelijke oplossingen voor de tweede, beide zijn vrijwel even lang.) Het feit dat er twee verschillende oplossingen zijn laat zien waarom deze problemen zo moeilijk zijn. Steinerpunten kunnen op zo veel plekken geplaatst worden. Dat het bijna niet te doen is ze allemaal uit te proberen.

Ladder netwerken als dit geven nog een extra uitbreiding van dit probleem.



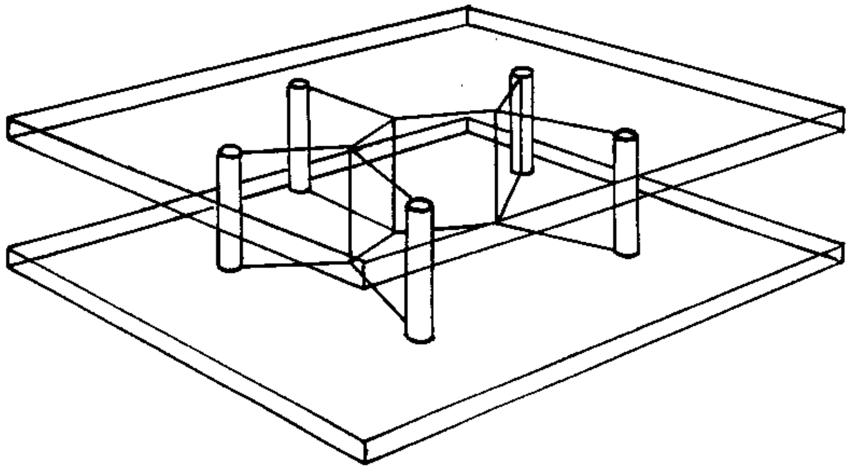
De oplossing voor een ladder met twee sporten is uiteraard precies hetzelfde als een vierkant. Maar voor een ladder met drie sporten is de oplossing al heel anders - zoals je zal ontdekken als je het nog een keer uit je hoofd probeert te tekenen! De oplossing voor vier sporten is weer ongeveer hetzelfde als de twee sporten ladder die met elkaar verbonden worden, maar de vijf sporten ladder is weer een uitbreiding van de drie sporten ladder. In



Een aantal minimale Steinerbomen voor laddernetwerken.

het algemeen verschilt de vorm van een Steinerboom bij een ladder sterk met het aantal sporten. Als het aantal even is, is de oplossing het aan elkaar verbinden van oplossingen voor twee sporten, bij een oneven aantal sporten is het een soort herhaling van de drie-sporten oplossing. Maar dit soort dingen keihard bewijzen is niet makkelijk.
Een andere interessante activiteit is om met zeepsop Steinerbomen te maken. Je kan dit doen door twee transparante relatief sterke plastic bladen te nemen en die met pinnen te verbinden. Deze moeten de dorpen voorstellen die met elkaar verbonden moeten worden, zoals op de volgende bladzijde getoond wordt.

Als je nu de hele constructie in een zeepbad dompelt, zul je zien dat wanneer je het uit het bad haalt er een film van zeep de pinnen heel mooi verbindt als een Steinerboomnetwerk. Jammer genoeg is het niet noodzakelijk een minimale Steinerboom. De zeep vindt een weg die de lengte minimaliseert, maar dit is alleen lokaal en niet noodzakelijk een algemene minimale oplossing. Er kunnen hele andere, veel betere plekken zijn voor Steinerpunten die een kortere lengte geven. Als je bijvoorbeeld de zeepwegen kan de ene keer kan voorstellen als de eerste oplossing van Uitbreiding 2 als de constructie uit het zeepbad en een andere keer de tweede oplossing.



Zo ziet de constructie met een Steinernetwerk met zeepsop er ongeveer uit.

Waar gaat dit eigenlijk over?

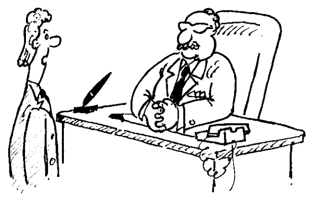
De netwerken waar we aan hebben gewerkt zijn minimale Steinerbomen. Ze heten "bomen" omdat ze geen circuit bevatten, net als de takken van een echte boom groeien ze uit elkaar, maar dan kijk je van de "verkeerde kant". Als je een boom aan een willekeurige knoop optilt zullen er alleen wegen naar beneden zijn met splitsingen. Ze heten Steinerbomen omdat er nieuwe knooppunten, Steinerpunten toegevoegd kunnen worden in de takken. En ze zijn "minimaal" omdat ze de kortste totale lengte hebben waarbij alle knooppunten verbonden zijn. In Modderstad (activiteit 9) hebben we geleerd dat een netwerk dat knooppunten verbindt die de totale lengte minimaliseert een minimaal opspannende boom heet: Steinerbomen zijn eigenlijk precies hetzelfde alleen mag je nu knooppunten toevoegen om de lengte te minimaliseren.

Een ander interessant verschil is dat er voor het vinden van een minimaal opspannende boom er een efficiënt algoritme bestaat (activiteit 9) - je begint met de twee dichtstbijzijnde tot dan toe nog niet verbonden knopen te verbinden en gaat zo verder - en voor de minimale Steinerboom bestaat er geen enkel efficiënte oplossing. Steinerbomen zijn veel moeilijker omdat je moet beslissen waar je de extra knooppunten toevoegt. Sterker nog het moeilijke is niet eens de precieze locatie van de Steinerpunten, maar het beslissen waar ze ongeveer komen is al heel lastig: zie bijvoorbeeld het verschil in de twee oplossingen bij voorbeeld 2. Als je weet in welke gebied je de nieuwe knooppunten moet zetten, is het afstemmen naar de optimale plek relatief simpel. Zeep doet dat erg effectief, net als computers.

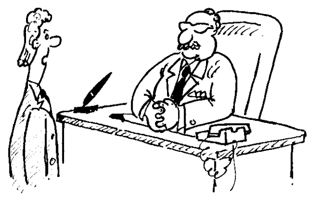
Minimale Steinerbomen spelen een grote rol in een verhaal over grote besparingen in de telefoonindustrie. Voor 1967 toen zakelijke klanten grote besloten telefoonnetwerken hadden, huurden ze de lijnen van een telefoonmaatschappij. Hoeveel ze daarvoor moesten betalen werd niet bepaald op basis van het gebruik van de telefoonlijnen, maar op basis van het kortste netwerk dat voldeed. De reden daarvoor was dat de klant niet extra zou moeten betalen wanneer het telefoonbedrijf routes via omwegen zou gebruiken. Oorspronkelijk werd het bedrag dat betaald moest worden bepaald door een algoritme op basis van de minimaal opspannende boom. In 1967 ontdekte een klant - een vliegmaatschappij met drie grote netwerken dat als zij een vierde netwerk zouden aanvragen op een tussenliggend knooppunt, dan de lengte van het totale netwerk werd gereduceerd. Het telefoonbedrijf werd gedwongen om de kosten naar beneden te brengen tot wat het zou zijn als het bedrijf een vierde netwerk op het Steinerpunt zou hebben! Meestal geeft een minimale Steinerboom maar een reductie van de lengte van vijf tot tien procent ten opzichte van een minimaal opspannende boom, maar dat kan bij grote bedragen heel wat geld schelen. Het Steinerboomprobleem wordt ook wel het “kortste netwerkprobleem” genoemd, omdat het op zoek is naar het kortste netwerk dat een set van knooppunten verbindt.

Als je de twee voorgaande activiteiten, de cartograafpuzzel en Toeristenstad, hebt gedaan dan zal het je niet verbazen dat ook het Steinerboomprobleem NP-volledig is. Als het aantal knooppunten toeneemt, neemt ook het aantal mogelijke locaties voor Steinerpunten toe. En alle mogelijkheden afgaan leidt tot een exponentieel groeiende zoektocht.
Dit is weer een van de duizenden problemen waarvan men niet weet of een exponentiële zoektocht het beste voorhanden is of dat er nog een onontdekt polynomiaal-tijd algoritme is. Wat men wel weet is dat als er een polynomiaal-tijd algoritme voor dit probleem wordt gevonden, deze vrij makkelijk omgezet kan worden tot een polynomiaal-tijd algoritme voor het graafkleuren, het vinden van een minimaal dominerende set, en alle andere problemen uit de NP-volledigheidscategorie.

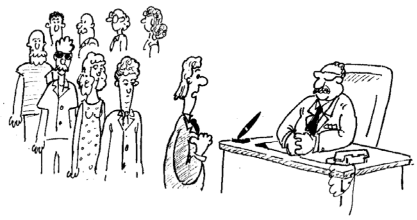
Aan het eind van de vorige activiteit hebben we uitgelegd dat de “NP” uit NP-volledig staat voor “non-deterministisch polynomiaal” en “volledig” slaat op het feit dat als er een polynomiaal-tijd algoritme wordt gevonden voor een van de NP-volledige problemen dit een oplossing kan vormen voor alle anderen. Een reeks van problemen die oplosbaar is in polynomiale tijd heet P. Dus de cruciale vraag is, bestaan er polynomiaal-tijd algoritmes voor NP-volledige problemen, in andere woorden is P = NP? Het antwoord op deze vraag is niet bekend en is een van de grootste mysteries in de moderne computerwetenschap. Problemen waarvoor een polynomiaal-tijd algoritme bestaat - ook al zijn de algoritmes misschien niet zo snel - zijn “handelbaar” (in het Engels: tractable). Problemen waar niet zo’n algoritme bestaat heten “onhandelbaar” (in het Engels: intractable), omdat het niet uitmaakt hoe snel je computer is of hoeveel computers je aan elkaar koppelt, een kleine toevoeging aan het probleem betekent dat dit probleem in de praktijk niet opgelost kan worden. Het is (nog) niet bekend of de NP-volledige problemen - waaronder dus de cartograafpuzzel, Toeristenstad en de IJzige wegen - handelbaar zijn of niet. Maar de meeste computerwetenschappers zijn pessimistisch over het bestaan van een polynomiaal-tijd algoritme voor NP-volledige problemen en is het bewijs dat een probleem in de categorie NP-volledig valt dus een sterk bewijs dat het probleem dus onhandelbaar is.



“Ik kan geen efficiënt algoritme vinden. Ik ben denk ik te dom.”



“Ik kan geen efficiënt algoritme vinden, omdat zo’n algoritme niet mogelijk is.”



“Ik kan geen efficiënt algoritme vinden, maar al deze beroemde mensen ook niet.”

Wat kan je doen als je geen efficiënt algoritme vindt: drie mogelijkheden

Wat kan je doen als je baas vraagt om een efficiënt algoritme te bedenken dat een optimale oplossing voor een probleem moet vinden, maar het lukt je niet om er een te vinden? Zoiets moet zeker gebeurd zijn nadat de vliegmaatschappij ontdekte dat de kosten voor het netwerk naar beneden konden door het toevoegen van Steinerpunten.
Als je zou kunnen bewijzen dat er geen efficiënt algoritme bestaat dat tot de optimale oplossing zal komen zou dat al geweldig zijn. Maar het is erg lastig om dit soort negatieve resultaten te bewijzen in de computerwetenschap, want wie weet wat voor geniale programmeur ooit in de toekomst een geniaal trucje vindt om het probleem op te lossen. Dus helaas ben je waarschijnlijk niet in staat om definitief vast te stellen dat er geen efficiënt algoritme bestaat, het is moeilijk vast te stellen dat dit probleem onhandelbaar is. Het bewijzen dat je probleem NP-volledig is, en er dus letterlijk duizenden mensen in laboratoria en universiteiten aan hetzelfde soort problemen hebben gewerkt en ook zij geen werkbare oplossing hebben kunnen vinden, zou al heel knap zijn. Je zal dan waarschijnlijk geen bonus ontvangen, maar je zal wel mogen stoppen met je uitzichtloze zoektocht. Natuurlijk, in het dagelijks leven moeten ook dit soort problemen opgelost worden, en in dat geval gaat men over op heuristiek - algoritmes die niet de beste oplossing garanderen, maar wel een oplossing geven dichtbij de optimale oplossing. Heuristische algoritmes kunnen heel snel zijn en het verlies van het niet vinden van de beste oplossing is heel klein, dus zijn ze prima geschikt om hun taak te volbrengen. Het kan alleen frustrerend

zijn te weten dat er een iets beter rooster of iets betere lay-out van een netwerk of van wegen bestaat.

Verder lezen

De strip komt uit de informatica klassieker Computers and Intractability (Garey en Johnson). De column Computer recreations in het tijdschrift Scientific American legde in juni 1984 uit hoe je met zeepbellen Steinerbomen kon maken. daarbij werd ook melding gemaakt van allerlei andere analoge hulpmiddelen om computerproblemen op te lossen, bijvoorbeeld een spaghetti computer om te sorteren, en een apparaat dat met licht en spiegels kon bepalen of een getal priem was. Dewdney's Turing Omnibus heeft ook een hoofdstuk over analoge computers.