

# Activiteit 9

---

## Modderstad—Minimaal Opspannende Bomen

### Samenvatting

Onze maatschappij is verbonden middels heel veel netwerken: telefoonnet, elektriciteitsnet, de riolering, computernetwerk, en het wegennet. Gewoonlijk is er bij ieder netwerk een keuze waar de wegen, kabels of radioverbindingen worden aangelegd. Het zou fijn zijn als we een methode hebben om zaken efficiënt te verbinden.

### Kerdoelen

- Wiskunde: meetkunde. Ontdekken van vorm en ruimte: vinden van kortste paden op een kaart

### Leeftijd

- 9 en ouder

### Vaardigheden

- Probleem oplossen

### Materialen

Iedere leerling heeft nodig:

- *Werkblad: Modderstad*
- Fiches of stukjes karton (ongeveer 40 per kind)

# Modderstad

---

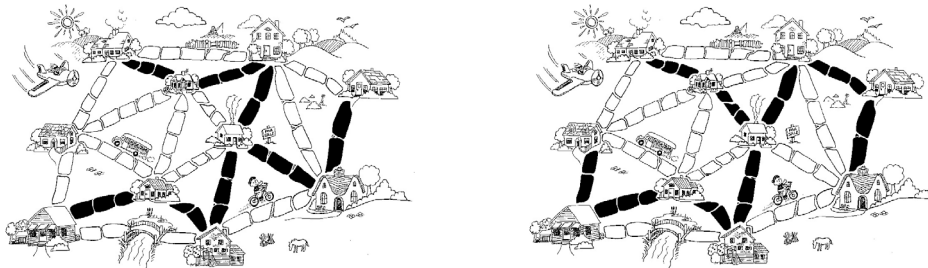
## Introductie

Bij deze activiteit leer je hoe computers worden gebruikt om oplossingen te vinden voor praktische problemen, bijvoorbeeld hoe huizen zo goed mogelijk aan te sluiten op het elektriciteitsnet. Laat de kinderen het werkblad “Modderstad” gebruiken waar het probleem wordt uitgelegd.

## Nabespreking

Laat de kinderen vertellen over de oplossingen die ze hebben gevonden. Welke strategieën hebben ze gebruikt?

Een goede manier om de beste oplossing te vinden begint met de lege kaart. Vervolgens bedek je de wegen met fiches totdat alle huizen verbonden zijn. Bij de keuze van de weg die je gaat bedekken neem je (een van) de kortste weg(en) waarbij je wegen tussen al verbonden huizen overslaat. Soms zijn er verschillende mogelijkheden en het eindresultaat kan verschillen door de mogelijkheid die je hebt gekozen. Hieronder zie je twee mogelijke oplossingen.



Een andere strategie is om alle paden te bedekken en dan overbodige paden te verwijderen. Dit kan wel een stuk langer duren.

Waar zijn nog meer netwerken in de wereld om je heen?

Het op deze manier weergeven van netwerken met knopen (de huizen in het voorbeeld) en kanten (de wegen) wordt een graaf genoemd. Netwerken die je zo kunt weergeven zijn bijvoorbeeld de wegen tussen steden of het routenetwerk van een luchtvaartmaatschappij.

Naast het algoritme van de “minimaal opspannende boom” (“Minimum spanning tree” in het Engels) hebben computerdeskundigen nog vele andere algoritmes die goed werken indien het probleem als een graaf kan worden beschreven. Voorbeelden zijn het kortste pad tussen twee punten (denk aan routeplanner) of de kortste reis die alle steden aandoet.

## Werkblad: Modderstad

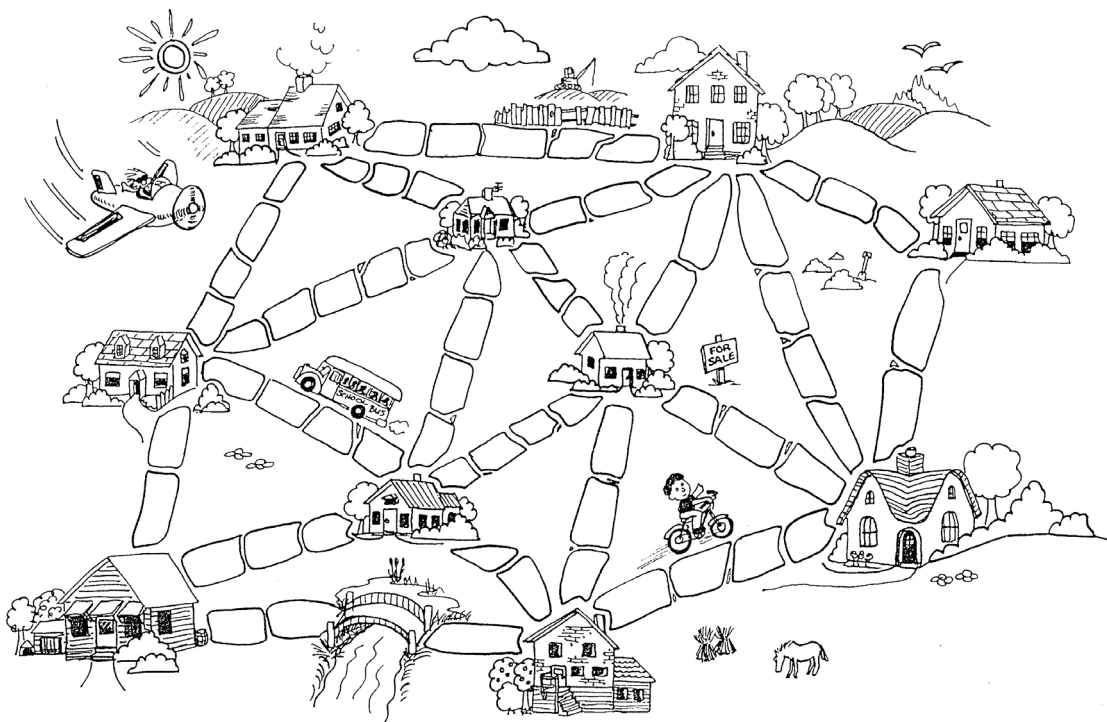
---

Er was eens een stad waar geen wegen waren. Vooral na zware regenstormen was het voor de inwoners heel lastig om bij elkaar op bezoek te gaan omdat de aarde dan in een grote modderpoel veranderde. Auto's bleven vast zitten en de mensen werden er behoorlijk smerig van. De burgemeester besloot dat sommige van de paden verhard moesten worden. Omdat ze geld wilden overhouden voor het aanleggen van een zwembad wilden ze niet teveel geld kwijt zijn. De burgemeester stelde voor dat het plan aan de volgende twee voorwaarden moest:

1. Er moesten voldoende paden verhard worden om alle bewoners de mogelijk te geven elkaar via verharde wegen te bereiken, en
2. Het verharden moest zo min mogelijk kosten.

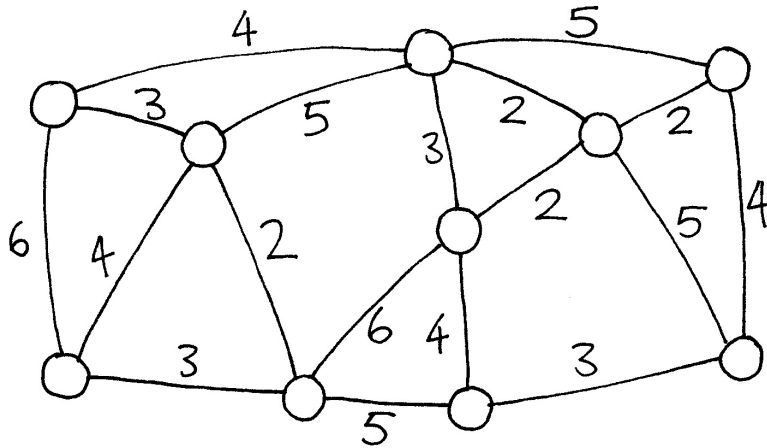
Hier zie je de plattegrond van het dorp. Het aantal tegels tussen de huizen geeft aan hoe duur het is om dat pad te verharden. Om een pad te verharden leg je fiches op de tegels. Maak met zo min mogelijk fiches een netwerk dat alle huizen verbindt.

Welke strategieën heb je gebruikt om dit probleem op te lossen?



## Variaties en uitbreidingen

Hier is een andere manier om de huizen en de paden weer te geven:



De huizen zijn weergegeven met cirkels (knopen), de modderige paden met lijnen (kanten), en de lengte van de paden wordt weergegeven door het getal dat erbij staat.

Informatici en wiskundigen gebruiken dit soort diagrammen vaak om een probleem te beschrijven. Ze noemen het een graaf. Niet te verwarren met die graaf die in Den Haag woont (“en zijn zoon heet Jantje”). Een graaf hoef je niet op schaal te tekenen, het gaat erom welke knopen verbonden zijn en welk gewicht bij zo’n verbinding hoort.

Kun je zelf wat andere modderdorpen tekenen en de goedkoopste manier vinden om verharde wegen aan te leggen? Kijk ook of de oplossing van anderen overeenkomt met die van jou.

Kan je een regel bedenken voor het aantal wegen dat nodig is voor de beste oplossing? Hangt het af van het aantal huizen dat er is?

## Waar gaat dit eigenlijk over?

---

Stel dat je voor een nieuwe stad moet bedenken hoe het water, de elektriciteit en het gas naar alle huizen moet worden gebracht. Ieder huis apart verbinden met de elektriciteitscentrale is nogal omslachtig, veel beter is het om een netwerk aan te leggen dat voor alle huizen een verbinding met de centrale waarborgt. Het maakt daarbij niet echt uit dat sommige huizen een veel langere route naar de elektriciteitscentrale krijgen, zolang ze verbonden zijn is er stroom!

De opdracht om een netwerk te maken waarbij de totale lengte zo min mogelijk is wordt wel het probleem van een minimaal opspannende boom genoemd.

Minimaal opspannende bomen zijn niet alleen nuttig voor netwerken van gas en energie; ze helpen ook bij het oplossen van problemen in computernetwerken, telefoonnetwerken, oliepijpleidingen en routenetwerken van luchtvaartmaatschappijen. Hoewel je bij dat laatste voorbeeld, waarbij je de beste routes ontwerpt voor reizigers, je ook rekening moet houden met de kosten van de individuele reiziger. Niemand wil uren omreizen omdat het iets goedkoper is. Het vinden van de oplossing met het minimale totaal van wegen, zoals we deden voor Modderstad, is in het geval van vliegroutes niet voldoende omdat het geen rekening houdt met de wens bepaalde wegen sowieso op te nemen.

Je kunt minimaal opspannende bomen ook gebruiken bij andere problemen die als graaf kunnen worden gerepresenteerd. Bijvoorbeeld bij het handelsreizigersprobleem waarbij je zoekt naar een rondreis langs alle steden in het netwerk.

Er zijn efficiënte algoritmes (methodes) om in een willekeurige graaf een minimaal opspannende boom te vinden. Een eenvoudige methode is die waarbij je begint met geen enkele weg en vervolgens steeds de kortste nog niet gebruikte verbinding toevoegt die het netwerk laat groeien met een punt dat nog niet verbonden was. Deze methode heet Kruskals algoritme omdat J.B. Kruskal in 1956 er als eerste over publiceerde.

Er zijn nog vele problemen met grafen, waaronder het handelsreizigersprobleem, waar informatici nog altijd op zoek zijn naar snellere methodes die de best mogelijke oplossing vinden.

## Oplossingen en hints

---

Hoeveel wegen zijn er nodig in een stad met  $n$  huizen? In de optimale oplossing zijn dat er altijd  $n-1$ . Omdat je met  $n-1$  wegen  $n$  huizen kunt verbinden. Een extra weg is overbodig omdat het voor een tweetal huizen een dubbele verbinding maakt.